MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 10
8.1.2020

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Wir zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$
mit vollständiger Induktion (nach n).

Induktionsanfang: $n = 1$. Dann ist in der Tat $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \geq \sqrt{1}$. ✓

Induktionsschluß: $n \to n+1$: Es sei $n \geq 1$ und es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n} \qquad (\textbf{Induktionsvoraussetzung}).$$

Zu zeigen ist: $$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n+1} \qquad (\textbf{Induktionsbehauptung}).$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&\geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} && \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden)} \\
&= \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}} && \text{(gemeinsamer Nenner)} \\
&\geq \frac{\sqrt{n}\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}} && \sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}, \text{ also auch } \sqrt{n}\sqrt{n+1}+1 \geq \sqrt{n}\sqrt{n}+1 \\
&= \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} && \sqrt{n}\sqrt{n} = n \\
&= \sqrt{n+1}. \quad ✓
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde verwendet, daß für alle $a \geq 0$ gilt $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$; dies ist eine andere (weniger vertraute) Version der Definition $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$.

[Ebenfalls möglich, um

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$$

zu beweisen, ist natürlich der Weg, diese Ungleichung solange mit Äquivalenzumformungen zu traktieren, bis sich eine wahre Aussage ergibt. Dies könnte so aussehen:

$$\begin{aligned}
& && \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1} && \text{(mit } \sqrt{n+1} \text{ multiplizieren)}\\
& \iff && \sqrt{n^2+n}+1 \geq n+1 && \\
& \iff && \sqrt{n^2+n} \geq n && \text{(quadrieren)}\\
(*) & \iff && n^2+n \geq n^2 && \\
& \iff && n \geq 0 \quad \text{(wahre Aussage)} &&
\end{aligned}$$

An der Stelle $(*)$ steht hier tatsächlich ein Äquivalenzpfeil, weil beide Seiten der darüberstehenden Ungleichung *nichtnegative* Zahlen sind (und für $a, b \geq 0$ gilt ja $a \geq b \iff a^2 \geq b^2$).]

b) Wir zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 10$, gilt $2^n > n^3$
mit vollständiger Induktion (nach n).

Induktionsanfang: $n = 10$. Dann ist $2^{10} = 1024$ und $10^3 = 1000$, also ist $2^{10} > 10^3$. ✓

Induktionsschluß: $n \to n+1$: Es sei $n \geq 10$ und es gelte $2^n > n^3$ **(Induktionsvoraussetzung).**
Zu zeigen ist: $2^{n+1} > (n+1)^3$ **(Induktionsbehauptung).**

Nun ist einerseits

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^3 = n^3 + n^3, \qquad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)}$$

andererseits

$$(n+1)^3 = (n+1)^2(n+1) = (n^2+2n+1)(n+1) = n^3+3n^2+3n+1,$$

so daß es genügt, $n^3 \geq 3n^2+3n+1$ zu beweisen. Aber wegen $n \geq 10$ und $n^2 > n > 1$ ist

$$n^3 = n \cdot n^2 \geq 10n^2 > 7n^2 = 3n^2+3n^2+n^2 > 3n^2+3n+1,$$

und wir sind fertig.

c) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq 1$ fest gewählt.
Wir zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(1+x)^n \leq 1+(2^n-1)\,x$
mit vollständiger Induktion (nach n).

Induktionsanfang: $n = 0$. Dann ist $(1+x)^0 = 1$ sowie $1+(2^0-1)x = 1$, also gilt $(1+x)^0 \leq 1+(2^0-1)x$. ✓

Induktionsschluß: $n \to n+1$: Es sei $n \geq 0$ und es gelte

$$(1+x)^n \leq 1+(2^n-1)x \qquad \textbf{(Induktionsvoraussetzung).}$$

Zu zeigen ist $(1+x)^{n+1} \leq 1+(2^{n+1}-1)x$ **(Induktionsbehauptung)**

Da $0 \leq x \leq 1$, ist $0 \leq x^2 = x \cdot x \leq x$, und damit

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \\
&\leq \big(1+(2^n-1)x\big) \cdot (1+x) && \text{(nach Induktionsvoraussetzung).}\\
&= 1+(2^n-1)x+x+(\underbrace{2^n-1}_{\geq 0})x^2 \\
&\leq 1+(2^n-1)x+x+(2^n-1)x && (x^2 \leq x\text{, und Rechenregeln für } \leq)\\
&= 1+(2^n-1+1+2^n-1)x \\
&= 1+(2 \cdot 2^n-1)x \\
&= 1+(2^{n+1}-1)x,
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

2. a) Die Aussage ist **wahr**:
Es ist nämlich $a_2 = (a_2 + a_1) - a_1 \in \mathbb{N}_0$, und die Behauptung folgt jetzt sofort aus den Rechenregeln für Teilbarkeit 5.8 f).

b) Die Aussage ist ebenfalls **wahr**:
Sei also $b \mid a_1 \;\vee\; b \mid a_2$.
Falls $b \mid a_1$, so ist nach 5.8g) dann $b \mid a_1 \cdot a_2$. ✓
[Oder man verwendet direkt die Definition der Teilbarkeit:
Falls $b \mid a_1$, so gibt es ein $q_1 \in \mathbb{N}_0$ mit $a_1 = q_1 \cdot b$, also $a_1 \cdot a_2 = (q_1 \cdot b) \cdot a_2 = \underbrace{(q_1 \cdot a_2)}_{\in \mathbb{N}_0} \cdot b$, also $b \mid (a_1 \cdot a_2)$ ✓]

Falls $b \mid a_2$, so ist nach 5.8g) dann $b \mid (a_2 \cdot a_1)$. ✓

c) Die Aussage ist **falsch**:
Beispielsweise für $b = 12$, $a_1 = 3$ und $a_2 = 8$ gilt zwar $b \mid a_1 \cdot a_2$ (denn $12 \mid 24$), jedoch weder $b \mid a_1$ noch $b \mid a_2$ (denn $12 \nmid 3$ und $12 \nmid 8$).

3. Wir beweisen alle diese Aussagen durch Induktion nach n.

a) **Induktionsanfang:** $n = 0$. Dann ist $4 \cdot 0^3 - 0 = 0$ und $3 \mid 0$. ✓

Induktionsschluß: $n \to n+1$: Es sei $n \geq 0$, und es gelte
$3 \mid (4n^3 - n)$ **(Induktionsvoraussetzung).**
Zu zeigen ist $3 \mid \big(4(n+1)^3 - (n+1)\big)$ **(Induktionsbehauptung).**

Es ist

$$\begin{aligned} 4(n+1)^3 - (n+1) &= 4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n+1) \\ &= 4n^3 - n + 12n^2 + 12n + 3 \\ &= (4n^3 - n) + 3 \cdot (4n^2 + 4n + 1) \end{aligned}$$

Nun gilt $3 \mid 3 \cdot (4n^2 + 4n + 1)$ und nach Induktionsvoraussetzung $3 \mid (4n^3 - n)$, also nach 5.8f) dann auch $3 \mid [(4n^3 - n) + 3 \cdot (4n^2 + 4n + 1)]$, und damit $3 \mid (4(n+1)^3 - (n+1))$, was zu zeigen war.

b) **Induktionsanfang:** $n = 0$: Dann ist $5^0 + 7 = 1 + 7 = 8$ und $4 \mid 8$. ✓

Induktionsschluß: $n \to n+1$: Es sei $n \geq 0$, und es gelte
$4 \mid (5^n + 7)$ **(Induktionsvoraussetzung).**
Zu zeigen ist $4 \mid (5^{n+1} + 7)$ **(Induktionsbehauptung).**

Es ist

$$\begin{aligned} 5^{n+1} + 7 &= 5 \cdot 5^n + 7 \\ &= 4 \cdot 5^n + 5^n + 7. \qquad \text{(Trick!)} \end{aligned}$$

Nun gilt $4 \mid 4 \cdot 5^n$ und nach Induktionsvoraussetzung $4 \mid (5^n + 7)$, also nach 5.8f) dann auch $4 \mid [4 \cdot 5^n + 5^n + 7]$, und damit $4 \mid (5^{n+1} + 7)$, was zu zeigen war.

c) Sei $a \in \mathbb{N}_0$ fest gewählt. Wir zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $6 \mid (a^{2n+1} - a)$ durch vollständige Induktion (nach n).

Induktionsanfang: $n = 0$: Dann ist $a^{2\cdot 0+1} - a = a^1 - a = a - a = 0$ und $6 \mid 0$. ✓

Induktionsschluß: $n \to n+1$: Es sei $n \geq 0$, und es gelte

$6 \mid (a^{2n+1} - a)$ **(Induktionsvoraussetzung).**

Zu zeigen ist $6 \mid (a^{2(n+1)+1} - a)$ **(Induktionsbehauptung).**

Es ist

$$\begin{aligned} a^{2(n+1)+1} - a &= a^{2n+3} - a \\ &= a^2 \cdot a^{2n+1} - a \\ &= a^2 \cdot (a^{2n+1} - a + a) - a \\ &= a^2 \cdot (a^{2n+1} - a) + a^3 - a \\ &= a^2 \cdot (a^{2n+1} - a) + (a^3 - a). \end{aligned}$$

Nun ist nach Induktionsvoraussetzung $6 \mid (a^{2n+1} - a))$, und nach 5.10 der Vorlesung gilt auch $6 \mid (a^3 - a)$, also ist nach 5.8f) auch $6 \mid [a^2 \cdot (a^{2n+1} - a) + (a^3 - a)]$, also gilt $6 \mid (a^{2(n+1)+1} - a)$, was zu zeigen war.

4. Wir beweisen die Aussage, daß es bei n mit Einbahnstraßen verbundenen Dörfern immer mindestens eines gibt, von der aus man alle anderen erreichen kann, per Induktion über n. Da der Fall $n = 1$ trivial ist (dann gibt es keine Straßen), betrachten wir als **Induktionsanfang** den Fall $n = 2$: Die Dörfer D_1 und D_2 sind mit einer Straße verbunden, die in einer Richtung befahrbar ist. Also kann man von einem der beiden Dörfer in das andere gelangen, was die Behauptung im Fall $n = 2$ beweist.
   Nun zum **Induktionsschluß** von $n \to n+1$: Sei $n \geq 2$ und gelte, daß bei n Dörfern immer mindestens eines existiert, von dem aus man alle anderen erreichen kann (Induktionsvoraussetzung). Dann ist zu zeigen, das dasselbe bei $n+1$ Dörfern wahr bleibt.
   Nehmen wir von unseren Dörfern $D_1, ..., D_{n+1}$ die ersten n heraus, so wissen wir, daß es unter diesen Dörfern $D_1, ..., D_n$ eines gibt, von dem aus man alle anderen erreichen kann. (Das ist ja die Induktionsvoraussetzung.) Nennen wir es D_l. Wir wissen also:

   Von D_l aus kann man alle Dörfer $D_1, ..., D_n$ erreichen.

   Nun gibt es nach Aufgabenstellung eine Straße zwischen D_l und D_{n+1}. Es gibt hier zwei Möglichkeiten zu betrachten:

   - Die Straße ist in der Richtung $D_l \to D_{n+1}$ befahrbar. Dann kann man also von D_l aus alle Dörfer $D_1, ..., D_{n+1}$ erreichen und wir sind fertig mit dem Induktionsschluß.
   - Die Straße ist in der Richtung $D_{n+1} \to D_l$ befahrbar. Dann kann man also von D_{n+1} nach D_l fahren und von dort aus weiter in alle Dörfer $D_1, ...D_n$. Somit kann man von D_{n+1} aus alle Dörfer $D_1, ..., D_{n+1}$ erreichen und wir sind fertig mit dem Induktionsschluß.